

Công thức Green (tiếp theo) và tích phân mặt

Lê Đức Hưng

Bộ Môn Giải Tích, Khoa Toán-Tin Học, Trường ĐH KHTN, ĐHQG-HCM

Ngày 18 tháng 12 năm 2025

Nhắc lại: Điều kiện đủ để trường vectơ phẳng là bảo toàn

Một tập $D \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là một *miền hình sao* (star-shaped region) nếu có một điểm $p_0 \in D$ sao cho với mọi điểm $p \in D$ thì đoạn thẳng nối p_0 và p được chứa trong D .

Định lý (điều kiện đủ để trường là bảo toàn, Bổ đề Poincaré)

Giả sử $\vec{F} = (P, Q)$ là một trường vectơ trơn trên miền mở hình sao D .
Nếu

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

trên D , thì trường $\vec{F}$ là bảo toàn trên D .

Kết luận của Bổ đề Poincaré vẫn đúng nếu thay miền hình sao bởi miền tổng quát hơn gọi là *miền đơn liên*, đại khái là miền chỉ gồm một mảnh không có lỗ thủng.

Ví dụ

Cho trường $F(x, y) = (y + 1) dx + x dy$ và gọi C là biên của hình tam giác với các đỉnh tại $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, và $B(0, 5)$. Giả sử C được định hướng theo chiều kim đồng hồ. Tính tích phân $\int_C F \cdot d\vec{s}$ bằng hai cách.

Cách 1: Ta tính tích phân trên đường C trực tiếp:

$$\int_C F(x, y) \cdot d\vec{s} = \int_{OB} F \cdot d\vec{s} + \int_{BA} F \cdot d\vec{s} + \int_{AO} F \cdot d\vec{s}.$$

Trên đoạn OB , OB được tham số hóa bởi $r(y) = (0, y)$ với $0 \leq y \leq 5$. Ta tính:

$$\int_{OB} F \cdot d\vec{s} = \int_0^5 F(r(y)) \cdot r'(y) dy = \int_0^5 (y + 1, 0) \cdot (0, 1) dy = 0.$$

Trên đoạn BA, BA được tham số hóa bởi

$$r(t) = (1 - t)(0, 5) + t(2, 0) = (2t, 5 - 5t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

nên ta tính:

$$\begin{aligned} \int_{BA} F \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 F(r(t)) \cdot r'(t) dt \\ &= \int_0^1 (6 - 5t, 2t) \cdot (2, -5) dt \\ &= \int_0^1 (12 - 20t) dt \\ &= 2. \end{aligned}$$

Trên đoạn AO, AO được tham số hóa bởi $r(x) = (x, 0)$ với $0 \leq x \leq 2$. Ta tính:

$$\begin{aligned}\int_{AO} F \cdot d\vec{s} &= - \int_0^2 F(r(x)) \cdot r'(x) dx \\ &= - \int_0^2 (1, x) \cdot (1, 0) dx \\ &= - \int_0^2 dx = -2.\end{aligned}$$

Như vậy, tích phân đã cho là:

$$\int_C F \cdot d\vec{s} = 0 + 2 + (-2) = 0.$$

Cách 2: Gọi D là miền bên trong đường C . Áp dụng Định lý Green, vì đường C trái với hướng tương thích với miền D nên

$$\int_C F \cdot d\vec{s} = - \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(y+1) \right] dA = - \iint_D (1-1) dA = 0.$$

Cách 3: Trên $\mathbb{R}^2$, với $F(x, y) = (y+1, x)$ thì

$$\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial y}(y+1) = 1,$$

nên F là trường bảo toàn trên $\mathbb{R}^2$. Vì C là đường cong kín nên

$$\int_C F \cdot d\vec{s} = 0.$$

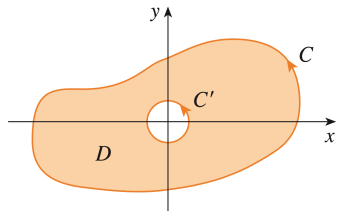


Ví dụ (trở lại trường vectơ không bảo toàn phía trên)

Cho trường

$$F(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}.$$

Chứng minh rằng tích phân $\int_C F \cdot d\vec{s} = 2\pi$ với C là bất kỳ đường cong đơn, kín nào quanh gốc tọa độ O có hướng ngược chiều kim đồng hồ.



Gọi C là bất kỳ đường cong đơn, kín nào như giả thiết. Gọi C' là một đường tròn tâm tại O và bán kính a đủ nhỏ sao cho C' nằm bên trong miền được C bao quanh và C' cũng có hướng ngược chiều kim đồng hồ.

Đặt D là miền bị chặn giữa C và C' . Ta dễ dàng thấy C và $-C'$ có hướng tương thích với D .

Như vậy, ta có được $\partial D = C \cup (-C')$. Công thức Green cho ta:

$$\begin{aligned} & \int_C P \, dx + Q \, dy - \int_{C'} P \, dx + Q \, dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dA \\ &= \iint_D \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \, dA \\ &= 0, \end{aligned}$$

nên ta có được cách tính:

$$\int_C P \, dx + Q \, dy = \int_{C'} P \, dx + Q \, dy.$$

Điều này nghĩa là tích phân trên bất kỳ đường đi đơn, kín, ngược chiều kim đồng hồ nào quanh gốc tọa độ O đều bằng với tích phân trên đường tròn (O, a) với a đủ nhỏ và hướng ngược chiều kim đồng hồ.

Đường tròn C' như trên có tham số là $x = a \cos t$ và $y = a \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, nên tích phân là:

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot d\vec{s} &= \int_{C'} F \cdot d\vec{s} \\&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-a \sin t}{a^2}, \frac{a \cos t}{a^2} \right) \cdot (-a \sin t, a \cos t) dt \\&= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\&= \int_0^{2\pi} 1 dt \\&= 2\pi.\end{aligned}$$



Vectơ pháp tuyến và vectơ tiếp tuyến

Cho D là miền phẳng và F là một trường trên D sao cho công thức Green có thể được áp dụng. Giả sử ∂D được tham số hóa theo chiều dương bởi

$$C(t) = (x(t), y(t)), \quad a \leq t \leq b.$$

Vectơ vận tốc của đường biên là $C'(t) = (x'(t), y'(t))$ (cùng phương và chiều với vectơ tiếp tuyến). **Vectơ pháp tuyến ngoài** n (outer normal vector) của ∂D tại điểm $(x(t), y(t))$ được định nghĩa là:

$$n = \frac{1}{\|C'(t)\|} (y'(t), -x'(t)).$$

Ta giải thích điều này như sau: vectơ $(-y'(t), x'(t))$ vuông góc với vectơ $(x'(t), y'(t))$, nên $\vec{n}$ cùng phương với $(-y'(t), x'(t))$.

Chiều của vectơ pháp tuyến ngoài n được xác định theo nguyên tắc: *chiều từ pháp tuyến ngoài n sang tiếp tuyến phải cùng chiều với chiều dương chuẩn tắc của mặt phẳng, nghĩa là chiều từ $(1, 0)$ sang $(0, 1)$.*

Do đó định thức của ma trận gồm hai vectơ n và $C'(t)$ phải dương:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{y'(t)}{\|C'(t)\|} & x'(t) \\ \frac{-x'(t)}{\|C'(t)\|} & y'(t) \end{pmatrix} = \frac{(y'(t))^2 + (x'(t))^2}{\|C'(t)\|} > 0$$

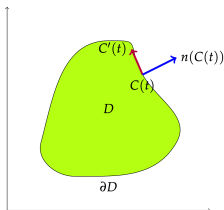
và ta xác định được chính xác công thức của n như trên.

Ví dụ: Đường cong $r(t) = (\cos t, \sin t)$ có vectơ tiếp tuyến tại điểm có $t = \frac{\pi}{4}$ là:

$$r' \left(\frac{\pi}{4} \right) = \left(-\sin \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{4} \right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Vectơ pháp tuyến ngoài tại điểm này là:

$$n = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{4}}} \left(\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$



Áp dụng vào công thức Green, ta có:

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot n \, ds &= \int_a^b (P(C(t)), Q(C(t))) \cdot \frac{(y'(t), -x'(t))}{|C'(t)|} |C'(t)| \, dt \\&= \int_C P \, dy - Q \, dx \\&= \int_C -Q \, dx + P \, dy \\&= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \, dA.\end{aligned}$$

Hàm phân tán div (divergence) và thông lượng (flux)

Đặt

$$\nabla \cdot (P, Q) = \operatorname{div}(P, Q) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y},$$

thì ta có đẳng thức

$$\int_{\partial D} F \cdot n \, ds = \iint_D \operatorname{div} F \, dA.$$

Tích phân $\int_C F \cdot n \, ds$ là tổng thành phần pháp tuyến ngoài của $\vec{F}$ dọc theo biên ∂D . Nếu $\vec{F}$ là một trường vectơ vận tốc thì tích phân này thể hiện **thông lượng** (lượng đi qua, flux) qua ∂D .

Diện tích sử dụng công thức Green

Giả sử D là miền trên đó công thức Green có thể áp dụng được. Như vậy, diện tích của D có thể được tính bằng:

$$|D| = \int_{\partial D} x \, dy = - \int_{\partial D} y \, dx = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x \, dy - y \, dx.$$

Chứng minh: Ta đã biết diện tích của D được tính bằng tích phân

$$|D| = \iint_D 1 \, dA.$$

Tiếp theo, ta chọn trường $F = (P, Q)$ sao cho $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$.

Ta có một số lựa chọn sau để $Q_x - P_y = 1$:

$$\begin{array}{lll} P(x, y) = 0 & P(x, y) = -y & P(x, y) = -\frac{1}{2}y \\ Q(x, y) = x & Q(x, y) = 0 & Q(x, y) = \frac{1}{2}x \end{array}$$

Áp dụng Định lý Green cho $(P, Q) = (0, x)$, ta có:

$$|D| = \int_{\partial D} 0 \, dx + x \, dy = \int_{\partial D} x \, dy.$$

Áp dụng Định lý Green cho $(P, Q) = (-y, 0)$, ta có:

$$|D| = \int_{\partial D} -y \, dx + 0 \, dy = - \int_{\partial D} y \, dx.$$

Áp dụng Định lý Green cho $(P, Q) = \left(-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x\right)$, ta có:

$$|D| = \int_{\partial D} -\frac{1}{2}y \, dx + \frac{1}{2}x \, dy = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x \, dy - y \, dx.$$

Đây là điều phải chứng minh.



Ví dụ

Tính diện tích hình ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Với D là hình ellipse, phương trình tham số của ∂D là $x = a \cos t$ và $y = b \sin t$ với $0 \leq t \leq 2\pi$. Với phương trình tham số này thì ∂D có hướng tương thích với D .

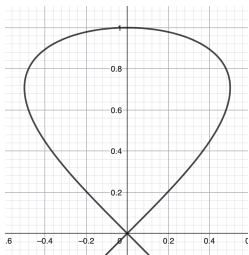
Áp dụng công thức diện tích $|D| = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x \, dy - y \, dx$, ta có:

$$\begin{aligned} |D| &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(a \cos t)(b \cos t) - (b \sin t)(-a \sin t)] \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab (\cos^2 t + \sin^2 t) \, dt \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt \\ &= \pi ab. \end{aligned}$$



Ví dụ

Tính diện tích của miền bị chặn bởi đường cong được tham số hóa bởi $r(t) = (\sin(t) \cos(t), \sin(t))$ khi $0 \leq t \leq \pi$.



Gọi D là miền bị chặn. Tham số của $r(t)$ cho:

$$x(t) = \sin(t) \cos(t),$$

$$y(t) = \sin(t).$$

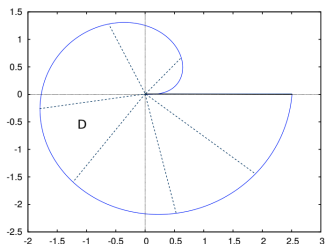
Áp dụng công thức diện tích từ công thức Green, ta có:

$$\begin{aligned} |D| &= \frac{1}{2} \int_{\partial D} x \, dy - y \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\sin(t) \cos(t) \cos(t) - \sin(t) (\cos^2(t) - \sin^2(t)) \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^3(t) \, dt = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$



Ví dụ

Tính diện tích của miền $D \subset \mathbb{R}^2$ bị chặn bởi đồ thị của hàm số trong tọa độ cực $r = \sqrt{\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ và tia Ox .



Gọi D là miền bị chặn. Trong hệ tọa độ Cartesian, ta có:

$$x(\theta) = r \cos(\theta) = \sqrt{\theta} \cos(\theta),$$

$$y(\theta) = r \sin(\theta) = \sqrt{\theta} \sin(\theta).$$

Ta tính:

$$dx = \frac{\cos(\theta) - 2\theta \sin(\theta)}{2\sqrt{\theta}} d\theta,$$

$$dy = \frac{\sin(\theta) + 2\theta \cos(\theta)}{2\sqrt{\theta}} d\theta.$$

Áp dụng công thức diện tích từ công thức Green, ta có:

$$\begin{aligned}|D| &= \frac{1}{2} \int_{\partial D} x \, dy - y \, dx \\&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{\theta} \cos(\theta) \frac{\sin(\theta) + 2\theta \cos(\theta)}{2\sqrt{\theta}} \right. \\&\quad \left. - \sqrt{\theta} \sin(\theta) \frac{\cos(\theta) - 2\theta \sin(\theta)}{2\sqrt{\theta}} \right) d\theta \\&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \theta \, d\theta \\&= \pi^2.\end{aligned}$$



Chương: Tích phân mặt

Tích có hướng của vectơ trong $\mathbb{R}^3$

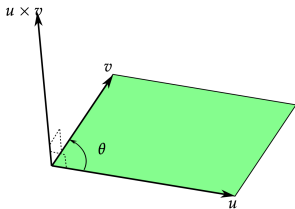
Cho hai vectơ $u = (u_1, u_2, u_3)$ và $v = (v_1, v_2, v_3)$ trong $\mathbb{R}^3$. **Tích có hướng** của hai vectơ này, ký hiệu là $u \times v$, được định nghĩa là vectơ

$$u \times v = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{k}.$$

Một số tính chất của tích có hướng là:

- ▶ $u \times v = -v \times u$.
- ▶ $(u \times v) \perp v$ và $(u \times v) \perp u$.
- ▶ $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2$.
- ▶ $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin \theta$, trong đó θ là góc giữa u và v .

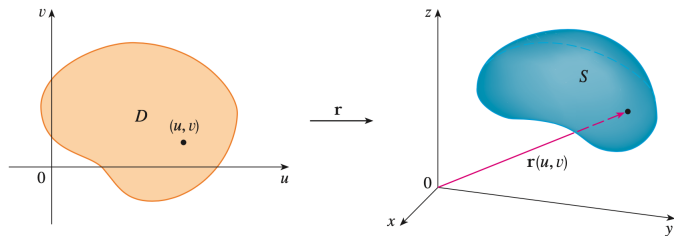
Miêu tả trực quan



Tích có hướng $u \times v$ là vectơ vuông góc với cả u và v có độ lớn đúng bằng “diện tích” của hình bình hành sinh bởi u và v , có hướng xác định bởi **quy tắc bàn tay phải**:

lòng bàn tay phải uốn theo chiều từ u sang v thì ngón tay cái của bàn tay phải sẽ chỉ chiều của $u \times v$.

Phương trình tham số của mặt trong $\mathbb{R}^3$



Một **mặt** (surface) là một ánh xạ r từ một tập con $D \subset \mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^3$ bởi:

$$r : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \mapsto r(u, v) = (x, y, z)$$

hay ta có phương trình tham số của mặt:

$$r(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}.$$

Tập ảnh $r(D)$ được gọi là **vết** của mặt.

Ví dụ: tham số hóa mặt phẳng

Trong $\mathbb{R}^3$, phương trình $ax + by + cz = d$ với $(a, b, c) \neq 0$ xác định một tập hợp điểm P tạo thành một *mặt phẳng*.

Nếu $A(x_0, y_0, z_0) \in P$ thì phương trình của P được viết lại là:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow -(ax_0 + by_0 + cz_0) + d = 0,$$

nghĩa là $(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$.

Như vậy mặt phẳng P là tập hợp tất cả các điểm $M(x, y, z)$ sao cho vectơ $M - A$ từ điểm A tới điểm M vuông góc với vectơ $N(a, b, c)$. Vì vậy, ta gọi vectơ N là một **vectơ pháp tuyến** chỉ phương của mặt phẳng P .

Nếu ta biết thêm điểm B và C thuộc P thì đặt $u = B - A$ và $v = C - A$, ta có $N \perp u$ và $N \perp v$.

Do đó, vectơ N cùng phương với $u \times v$. Từ đó ta có thể miêu tả P là mặt phẳng đi qua điểm A có phương cho bởi hai vectơ u và v , hay mặt phẳng đi qua điểm A sinh bởi hai vectơ u và v .

Bằng tính toán trực tiếp, ta thấy

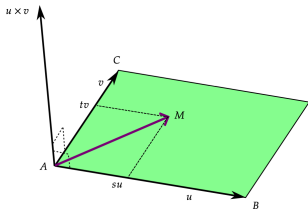
$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - (u \cdot v)^2,$$

và độ lớn của vectơ $u \times v$ chính là hình bình hành sinh bởi hai vectơ này.

- Với phương trình mặt phẳng $(P) : ax + by + cz = d$ với $(a, b, c) \neq 0$ như trên, $c \neq 0$, mặt phẳng P là vết của ánh xạ:

$$(x, y) \mapsto \left(x, y, z = \frac{d - ax - by}{c} \right).$$

với $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Đây là một cách tham số hóa mặt phẳng P .



- Nếu ba điểm A, B, C nằm trong mặt phẳng P , thì đặt các vectơ $u = B - A$ và $v = C - A$ và giả sử u và v không cùng phương.

Khi đó, với mọi điểm $M \in P$, vectơ $M - A$ là một tổ hợp tuyến tính của u và v , nghĩa là $M - A = su + tv$ với $s, t \in \mathbb{R}$, nghĩa là

$$(s, t) \mapsto A + su + tv$$

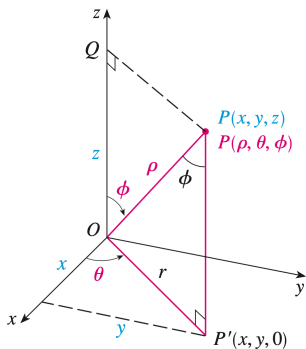
là một tham số hóa khác của mặt phẳng P đi qua điểm A sinh bởi hai vectơ độc lập tuyến tính cho trước. □

Ví dụ: tham số hóa mặt cầu

Nửa trên ($z \geq 0$) của mặt cầu đơn vị được tham số hóa bởi:

$$(x, y) \mapsto \left(x, y, z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \right),$$

với $x^2 + y^2 \leq 1$.



Ta cũng có thể tham số hóa nửa trên của mặt cầu đơn vị sử dụng hệ tọa độ cầu:

$$(\phi, \theta) \mapsto (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi),$$

với $0 \leq \theta \leq 2\pi$ và $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$.

Ví dụ

Xét phương trình tham số của mặt cong:

$$r(u, v) = 2 \cos u \vec{i} + v \vec{j} + 2 \sin u \vec{k}.$$

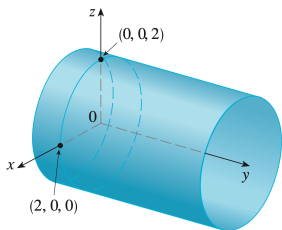
Ta thấy rằng:

$$x(u, v) = 2 \cos u, \quad y(u, v) = v, \quad z(u, v) = 2 \sin u.$$

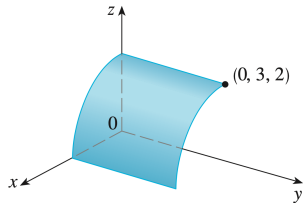
Điều này cho ta thấy với bất kỳ điểm (x, y, z) nào, ta cũng có mối liên hệ:

$$x^2 + z^2 = 4 \cos^2 u + 4 \sin^2 u = 4,$$

nghĩa là tất cả mặt cắt song song với mặt phẳng xz (khi đó y cố định) là các đường tròn với bán kính 2.



Vì $y = v$ và v không bị giới hạn nên mặt cong này là bề mặt của hình trụ có bán kính 2 với y là trục.



Nếu ta giới hạn

$$0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq v \leq 3,$$

thì $x \geq 0$, $z \geq 0$, $0 \leq y \leq 3$, và ta được một phần tư bề mặt hình trụ có chiều dài 3. $\square$

Giả sử $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm trơn trên một tập mở chứa D . **Đồ thị của hàm f** là tập

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$$

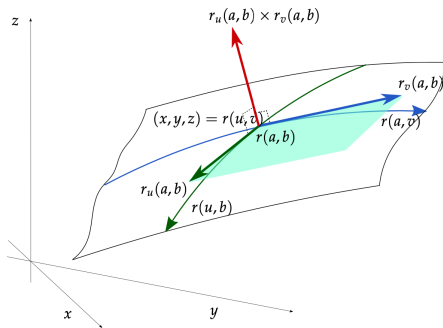
là vết của mặt $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ bởi $r(x, y) = (x, y, f(x, y))$.

Ta nói r là một *tham số hóa của đồ thị của hàm f* .

Ở ví dụ về nửa mặt cầu đơn vị với $z \geq 0$, ta có

$$r(x, y) = \left(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2} \right)$$

là tham số hóa của đồ thị của hàm số $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

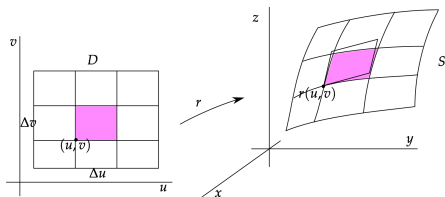


Với tham số hóa $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, nếu giữ v cố định và chỉ cho u thay đổi thì $r(u, v)$ trở lại là một đường đi trong $\mathbb{R}^3$ theo tham số u .

Đạo hàm của đường đi này theo u là $\frac{\partial r}{\partial u}(u, v) = r_u(u, v)$ là vectơ vận tốc của đường này. Ta có thể xem đây là một **vectơ tiếp xúc của mặt r tại điểm $r(u, v)$** .

Như vậy, tại bất kỳ điểm $(a, b) \in D$ nào, ta luôn có hai vectơ tiếp xúc của mặt là $r_u(a, b)$ và $r_v(a, b)$.

Diện tích bề mặt



Cho mặt:

$$r : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \mapsto r(u, v) = (x, y, z).$$

Với một phép chia của D , ta có một phép chia của mặt thành những mảnh nhỏ.

Một hình chữ nhật con với kích thước $\Delta u \times \Delta v$ sẽ được “chuyển thành” một mảnh trên mặt được xấp xỉ tuyến tính hình bình hành xác định bởi các vectơ $r_u(u, v)\Delta u$ và $r_v(u, v)\Delta v$.

Diện tích của hình bình hành này được cho bởi độ lớn của tích có hướng của hai vectơ này, tức là

$$\|r_u(u, v)\Delta u \times r_v(u, v)\Delta v\| = \|r_u(u, v) \times r_v(u, v)\|\Delta u\Delta v.$$

Như vậy, diện tích của mặt được xấp xỉ bởi tổng Riemann

$$\sum \|r_u(u, v) \times r_v(u, v)\| \Delta u \Delta v.$$

Định nghĩa (Diện tích của mặt)

Nếu một mặt (S) được tham số hóa bởi $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ với

$$r(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}, \quad (u, v) \in D$$

và S được *bao phủ chỉ một lần* với mỗi $(u, v) \in D$, thì **diện tích của mặt** được tính bằng:

$$A(S) = \iint_D \|r_u \times r_v\| \, du \, dv,$$

trong đó

$$r_u = \frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{k} \quad \text{và} \quad r_v = \frac{\partial x}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\vec{k}.$$

Ví dụ

Tìm diện tích bề mặt của quả cầu bán kính a .

Ta có thể tham số hóa bề mặt của quả cầu bởi:

$$r(\phi, \theta) = (a \sin \phi \cos \theta, a \sin \phi \sin \theta, a \cos \phi)$$

với miền xác định của (θ, ϕ) là:

$$D = \{(\phi, \theta) \mid 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Ta có hai vectơ tiếp xúc mặt cầu là:

$$\begin{aligned} r_\phi(\phi, \theta) &= (a \cos \phi \cos \theta, a \cos \phi \sin \theta, -a \sin \phi), \\ r_\theta(\phi, \theta) &= (-a \sin \phi \sin \theta, a \sin \phi \cos \theta, 0). \end{aligned}$$

Ta tính tích có hướng của hai vectơ:

$$\begin{aligned} r_\phi \times r_\theta &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a \cos \phi \cos \theta & a \cos \phi \sin \theta & -a \sin \phi \\ -a \sin \phi \sin \theta & a \sin \phi \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \\ &= (a^2 \sin^2 \phi \cos \theta, a^2 \sin^2 \phi \sin \theta, a^2 \sin \phi \cos \phi), \end{aligned}$$

nên

$$\|r_\phi \times r_\theta\| = a^2 \sin \phi,$$

vì $\sin \phi \geq 0$ với $0 \leq \phi \leq \pi$. Diện tích bề mặt của quả cầu là

$$A = \iint_D |r_\phi \times r_\theta| \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta = 4\pi a^2.$$



Diện tích của mặt đồ thị

Giả sử $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm trơn trên một tập mở chứa D . Xét mặt

$$r(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

có vết là đồ thị của hàm $f(x, y)$. Ta thấy hai vectơ tiếp xúc của mặt là:

$$r_x(x, y) = (1, 0, f_x(x, y)) \quad \text{và} \quad r_y(x, y) = (0, 1, f_y(x, y)).$$

Tích có hướng của hai vectơ sẽ là:

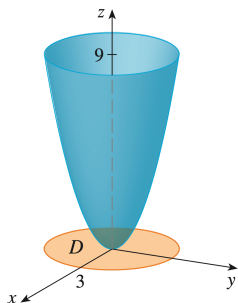
$$r_x \times r_y = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right), \quad |r_x \times r_y| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2},$$

nên diện tích của mặt đồ thị $z = f(x, y)$ là:

$$\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} \, dx \, dy.$$

Ví dụ

Tìm diện tích của mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ nằm bên dưới mặt phẳng $z = 9$.



Mặt phẳng $z = 9$ giao với khối paraboloid $z = x^2 + y^2$ tạo thành hình tròn có phương trình $x^2 + y^2 = 9$, tức là hình tròn D tâm O , bán kính 3.

Cách 1: Với $z = x^2 + y^2$, diện tích cần tính là:

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA \\ &= \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dA. \end{aligned}$$

Sử dụng hệ tọa độ cực, ta có:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta = 2\pi \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{6} (37\sqrt{37} - 1).$$

Cách 2: Với $z = x^2 + y^2$, mặt paraboloid được tham số hóa bởi

$$r(x, y) = (x, y, x^2 + y^2).$$

Ta tính $r_x = (1, 0, 2x)$, $r_y = (0, 1, 2y)$, và

$$r_x \times r_y = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{pmatrix} = -2x\vec{i} - 2y\vec{j} + \vec{k},$$

nên diện tích bề mặt cần tính là:

$$A = \iint_D \|r_x \times r_y\| \, dA = \iint_{x^2+y^2 \leq 9} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \, dx \, dy = \frac{\pi}{6}(37\sqrt{37}-1). \quad \square$$

Tích phân mặt loại một

Cho mặt $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ với vết $S = r(D)$. Cho $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Tích phân mặt loại một của f trên r là

$$\iint_r f \, dS = \iint_D f(r(u, v)) \|r_u(u, v) \times r_v(u, v)\| \, du \, dv.$$

Ta lưu ý rằng f là một hàm thực xác định trên vết $S = r(D)$, và tích phân mặt loại một chính là tổng giá trị của hàm trên mặt.

Tích phân mặt loại một còn được ký hiệu bằng $\int_S f \, d\sigma$, $\int_S f \, d\Sigma$.

Như vậy, ta thấy rằng, nếu $f \equiv 1$ thì

$$\iint_r 1 \, dS$$

chính là diện tích của mặt r .

Ví dụ

Tính tích phân

$$\iint_S (x + y + z) \, dS,$$

trong đó S là mặt hình bình hành với phương trình tham số $x = u + v$, $y = u - v$, $z = 1 + 2u + v$ với $0 \leq u \leq 2$, $0 \leq v \leq 1$.

Với phương trình tham số

$$r(u, v) = (u + v, u - v, 1 + 2u + v), \quad 0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 1,$$

ta có

$$r_u(u, v) \times r_v(u, v) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (3, 1, -2).$$

Ta tính tích phân:

$$\begin{aligned}& \iint_S (x + y + z) \, dS \\&= \int_0^1 \int_0^2 (u + v + u - v + 1 + 2u + v) \sqrt{9 + 1 + 4} \, du \, dv \\&= \sqrt{14} \int_0^1 \int_0^2 (4u + v + 1) \, du \, dv \\&= 11\sqrt{14}.\end{aligned}$$



Ví dụ

Tính tích phân

$$\iint_S x^2 \, dS,$$

trong đó S là mặt cầu đơn vị $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Ta tham số hóa mặt cầu đơn vị bằng tọa độ cầu:

$$x = \sin \phi \cos \theta, \quad y = \sin \phi \sin \theta, \quad z = \cos \phi,$$

tức là

$$r(\phi, \theta) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi), \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Hai vectơ tiếp xúc là:

$$r_\phi(\phi, \theta) = (\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, -\sin \phi),$$

$$r_\theta(\phi, \theta) = (-\sin \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \theta, 0).$$

Ta tính:

$$r_\phi \times r_\theta = (\sin^2 \phi \cos \theta, \sin^2 \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \phi), \quad \|r_\phi \times r_\theta\| = \sin \phi.$$

Tích phân ban đầu trở thành

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 \, dS &= \iint_D (\sin \phi \cos \theta)^2 \|r_\phi \times r_\theta\| \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \phi \cos^2 \theta \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta \int_0^\pi \sin^3 \phi \, d\phi \\ &= \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$



Ví dụ: tích phân mặt loại một trên mặt đồ thị

Giả sử $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm trơn trên một tập mở chứa D . Xét mặt

$$r(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

có vết là đồ thị S của hàm f . Giả sử $g : S \rightarrow \mathbb{R}$. Khi đó, tích phân của g trên r là:

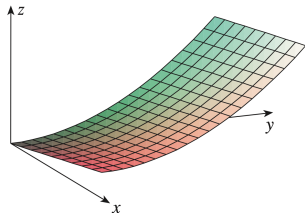
$$\iint_r g \, dS = \iint_D g(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy.$$

Ví dụ

Tính tích phân

$$\iint_S y \, dS,$$

trong đó S là mặt có phương trình $z = x + y^2$ với $0 \leq x \leq 1$ và $0 \leq y \leq 2$.



Vì $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$ và $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$, nên tích phân là:

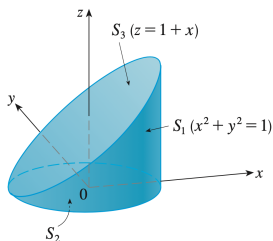
$$\begin{aligned} \iint_S y \, dS &= \int_0^2 \int_0^1 y \sqrt{1 + 1 + 4y^2} \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^2 y \sqrt{2 + 4y^2} \, dy \\ &= \frac{13\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

□

Cách khác: Tham số hóa $S(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$, tính $\|S_x \times S_y\|$, rồi áp dụng công thức.

Ví dụ

Tính tích phân $\iint_S z \, dS$, trong đó mặt S bao gồm: mặt bên S_1 của hình trụ $x^2 + y^2 = 1$, mặt đáy S_2 của hình tròn $x^2 + y^2 \leq 1$ trong mặt phẳng xy , mặt đỉnh S_3 của mặt phẳng $z = 1 + x$ nằm bên trên S_2 .



Vì $\iint_S z \, dS = \iint_{S_1} z \, dS + \iint_{S_2} z \, dS + \iint_{S_3} z \, dS$, nên ta cần tính từng tích phân rồi cộng kết quả lại.

Ta có phương trình tham số cho mặt S_1 trong hệ tọa độ trụ:

$$S_1(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z),$$

trong đó $0 \leq \theta \leq 2\pi$ và $0 \leq z \leq 1 + x = 1 + \cos \theta$.

Với $S_{1\theta} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$ và $S_{1z} = (0, 0, 1)$, ta tính:

$$S_{1\theta} \times S_{1z} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j},$$

nên $\|S_{1\theta} \times S_{1z}\| = 1$. Vì vậy, tích phân trên mặt S_1 là:

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} z \, dS &= \iint_D z \|S_{1\theta} \times S_{1z}\| \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos \theta} z \, dz \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^2 \, d\theta \\ &= \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Mặt S_2 nằm trong mặt phẳng xy , nghĩa là $z = 0$. Vì vậy, $\iint_{S_2} z \, dS = 0$.

Mặt S_3 có phương trình $z = 1 + x$, trong đó (x, y) nằm trong hình tròn tâm O , bán kính 1. Vì vậy, ta tính:

$$\begin{aligned}\iint_{S_3} z \, dS &= \iint_D (1 + x) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dA \\&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + r \cos \theta) \sqrt{1 + 1 + 0} r \, dr \, d\theta \\&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r + r^2 \cos \theta) \, dr \, d\theta \\&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cos \theta \right) \, d\theta \\&= \pi \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Do đó, tích phân đã cho là $\iint_S z \, dS = \frac{3\pi}{2} + 0 + \pi\sqrt{2} = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right) \pi$. □

Tích phân mặt loại hai

Cho mặt $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ với vết $S = r(D)$. Cho F là một trường vectơ trên S , tức là $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$. **Tích phân mặt loại hai** của F trên r là

$$\iint_r F \cdot d\vec{S} = \iint_D F(r(u, v)) \cdot (r_u(u, v) \times r_v(u, v)) du dv.$$

Quan sát đẳng thức của $r_u(u, v) \times r_v(u, v)$, ta thấy rằng:

$$r_u(u, v) \times r_v(u, v) = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \vec{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \vec{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \vec{k}.$$

Tích phân mặt loại hai là **tổng của thành phần pháp tuyến của trường trên mặt**. Đại lượng này dùng để đại diện cho lượng của trường đi xuyên qua mặt, tức là **thông lượng** (flux).

Ví dụ

Tính thông lượng của trường vectơ $F(x, y, z) = z\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k}$ từ bên trong quả cầu đơn vị $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ qua bề mặt.

Ta đã biết mặt quả cầu đơn vị có tham số hóa là:

$$r(\phi, \theta) = \sin \phi \cos \theta \vec{i} + \sin \phi \sin \theta \vec{j} + \cos \phi \vec{k}, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Như vậy, trường F trở thành

$$F(r(\phi, \theta)) = (\cos \phi, \sin \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \theta),$$

và ta cũng có

$$r_\phi \times r_\theta = \sin^2 \phi \cos \theta \vec{i} + \sin^2 \phi \sin \theta \vec{j} + \sin \phi \cos \phi \vec{k}.$$

Do đó,

$$F(r(\phi, \theta)) \cdot (r_\phi \times r_\theta) = \sin^2 \phi \cos \phi \cos \theta + \sin^3 \phi \sin^2 \theta + \sin^2 \phi \cos \phi \cos \theta).$$

Thông lượng của trường F là:

$$\begin{aligned}& \iint_S F \cdot d\vec{S} \\&= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(2 \sin^2 \phi \cos \phi \cos \theta + \sin^3 \phi \sin^2 \theta \right) d\phi d\theta \\&= 2 \int_0^\pi \sin^2 \phi \cos \phi d\phi \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta + \int_0^\pi \sin^3 \phi d\phi \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \\&= \frac{4\pi}{3}.\end{aligned}$$



Các ký hiệu khác

$$\begin{aligned}\iint_r P(x, y, z) \, dy \, dz &= \iint_r P \vec{i} \cdot d\vec{S} = \iint_r P(r(u, v)) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \, du \, dv, \\ \iint_r Q(x, y, z) \, dz \, dx &= \iint_r Q \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_r Q(r(u, v)) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \, du \, dv, \\ \iint_r R(x, y, z) \, dx \, dy &= \iint_r R \vec{k} \cdot d\vec{S} = \iint_r R(r(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \, du \, dv.\end{aligned}$$

Do đó, nếu $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ thì

$$\iint_r F \cdot d\vec{S} = \iint_r (P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy).$$

Định lý (bất biến của tích phân mặt qua phép đổi biến)

Giả sử D và D' là hai tập con mở bị chặn của $\mathbb{R}^2$ và $\varphi : D' \rightarrow D$ là một phép đổi biến. Cho mặt trơn $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$. Khi đó,

(a) Tích phân mặt loại một không đổi qua phép đổi biến:

$$\iint_r f \, dS = \iint_{r \circ \varphi} f \, dS.$$

(b) Tích phân mặt loại hai không đổi qua phép đổi biến bảo toàn định hướng:

$$\iint_r F \cdot d\vec{S} = \iint_{r \circ \varphi} F \cdot d\vec{S}.$$

(c) Tích phân mặt loại hai đổi dấu qua phép đổi biến đảo ngược định hướng:

$$\iint_r F \cdot d\vec{S} = - \iint_{r \circ \varphi} F \cdot d\vec{S}.$$

Chứng minh

Với $r(u, v)$ và $\varphi(s, t)$, nhớ lại ma trận Jacobi của hàm hợp:

$$J_{r \circ \varphi}(s, t) = J_r(u, v) J_\varphi(s, t).$$

Một cách cụ thể, ta có

$$\begin{aligned}\frac{\partial(r \circ \varphi)}{\partial s} &= \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial s}, \\ \frac{\partial(r \circ \varphi)}{\partial t} &= \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}.\end{aligned}$$

Lấy tích có hướng của hai vectơ trên, ta có:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(r \circ \varphi)}{\partial s} \times \frac{\partial(r \circ \varphi)}{\partial t} &= \left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} \right) \\ &= \left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)}.\end{aligned}$$

Viết cách khác:

$$(r \circ \varphi)_s \times (r \circ \varphi)_t = (r_u \times r_v) \det J_\varphi(s, t).$$

Sử dụng công thức đổi biến của tích phân bội, ta được điều phải chứng minh. □

Biểu thức trên cũng cho thấy: hai mặt cùng định hướng khi và chỉ khi hai vectơ pháp tuyến luôn cùng chiều, và trái định hướng khi và chỉ khi hai vectơ pháp tuyến luôn trái chiều.